

15

מיה"ס למדעי המחשב ומתמטיקה. תשס"ג, 07.07.2003
מרצים אלגוריתם. סמסטר ב', מועד א'.
שם המרצה: פרופ' ת. מוזיאלין.
משך המבחן: 2.5 שעות.

אפשר להשתמש רק במחשיבון ובדפי עזר המצורפים לטופס הבחינה.

חלק א': בחלק זה יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.

10 נקודות

1. תהינה $(G, *)$, $(H, *)$ שתי חבורות כלשהן. מעל הקבוצה $G \times H$ נגדיר פעולה בינארית \bullet ע"י הנוסחה: $(g_1, h_1) \bullet (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 * h_2)$. הוכח ש- $(G \times H, \bullet)$ חבורה.

15 נקודות

2. יהי $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם חבורות. אז

- א. $f(e_G) = e_H$.
- ב. $\forall g \in G \quad f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$.
- ג. לכל תת-חבורה $B \leq H$ מתקיים $f^{-1}(B) \leq G$.

15 נקודות

3. יהי $p(x) \in F[x]$ פולינום אי-פריק כלשהו. הוכח ש:
1. אם $p(x)$ מחלק פולינום $q(x) \in F[x]$ או $q(x)$ אי-פריק ב- $F[x]$, אז $p(x) \sim q(x)$.
2. אם $p(x)$ מחלק את המכפלה $a(x) \cdot b(x)$, אז $p(x)$ מחלק לפחות אחד מהגורמים (כאן $a(x), b(x) \in F[x]$).

10 נקודות

4. ארבע הפולינומים $a(x), b(x), c(x), d(x) \in F[x]$ מקיימים את השוויון $a(x) \cdot b(x) = c(x) \cdot d(x)$. הוכח שאם $\gcd(a(x), c(x)) = 1$ אז $a(x)$ מחלק את $d(x)$.

28

8.10 נקודות.

$$G = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9.10 נקודות.

המסדר של $(2, 3)$ הוא 8. מספר האברים של החבורה זמין לכל איבר השווה את מסדרו.

$$\begin{aligned} \langle 2 \rangle &= 8 & \langle 6 \rangle &= 4 \\ \langle 3 \rangle &= 8 & \langle 7 \rangle &= 8 \\ \langle 4 \rangle &= 2 & \langle 1 \rangle &= 8 \\ \langle 5 \rangle &= 8 \end{aligned}$$

בהצלחה!